Equivalencia Canónica entre Teorías de espín 1 Masivo

Pío J. Arias[a,b,1] **y Jean C. Pérez-Mosquera**[a,2]

[a]*Grupo de Campos y Partículas, Dpto. de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, AP47270, Caracas 1041-A, Venezuela*

[b]*Centro de Astrofísica Teórica, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes, AP26, La Hechicerta, Mérida 5101, Venezuela*

[1]parias@fisica.ciens.ucv.ve, [2]jcperez@fisica.ciens.ucv.ve

Abstract

Se considera el modelo de Cremmer-Scherck, generalizado, en contraposición con el modelo de Proca en dimensiones mayores que 3+1. Se muestra que el modelo de Proca es una versión de la de Cremmer y Scherck con el calibre fijado, además se muestra la equivalencia canónica entre estos.

Abstract

The model of Cremmer-Scherck and Proca are considered in dimensions greater than 3+1. It is obtained that the Proca model correspond to a gauged fixed version of the Cremmer-Scherck one, and we show their canonical equivalence.

1 Introducción

En 3+1 dimensiones, la acción del modelo de Proca es

$$S = \int_M d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\mu^2}{2} A_\mu A^\mu \right], \tag{1}$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es la intensidad de campo electromagnético. Esta acción no posee invariancias locales y describe partículas masivas de espín 1.

Otra teoría vectorial que describe espín 1 masivo en $3+1$ es la de Cremmer y Scherk, cuyo funcional de acción, invariante de calibre, es [1]

$$S^4_{CS} = \int_M d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{12\mu^2} H^{\mu\nu\lambda} H_{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} B_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} \right], \tag{2}$$

donde $H_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\lambda B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\nu\lambda}$ es la intensidad del campo de Kalb-Ramond.

Se puede probar que ambas teorías son equivalentes en regiones del espacio-tiempo con topología trivial [2, 3]. En este trabajo veremos que si se generalizaran ambas teorías a $d+1$ dimensiones, usando el dual del potencial de Kalb-Ramond, la equivalencia persiste.

2 Teorías Duales

La acción (1), puede ser escrita a primer orden si introducimos una 2-forma auxiliar $B = \frac{1}{2} B_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ [4].

$$\begin{aligned} S_P[A,B] &= \int_M \left[\frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} B_{\lambda\rho} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{\mu^2}{2} A_\mu A^\mu \right], \\ &= \frac{1}{2} \left(-(F, {}^\star B) + \frac{1}{4}(B,B) + \mu^2 (A,A) \right), \end{aligned} \tag{3}$$

donde

$$(\omega, \eta) \equiv \int_M \omega \wedge^\star \eta, \tag{4}$$

y usamos la notacion de la referencia [6] para el lenguaje de formas diferenciales. Las ecuaciones de movimiento que se obtienen de S_P son

$$\begin{aligned} d^{\dagger\star} B - \mu^2 A &= 0, \\ {}^\star dA - B &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

eliminando B de (5) tenemos

$$d^\dagger F - \mu^2 = 0, \tag{6}$$

las cuales son las ecuaciones de la teoría de Proca.

La acción (3) la generalizamos a $d+1$ dimensiones considerando a B como una $d-1$ forma [3] e introduciendo la 2-forma $T \equiv \;\; {}^\star B$, en lugar de B, como variable de campo. De este modo obtenemos la acción

$$S_P^\star[A,T] = -(F,T) - \frac{1}{2}(T,T) + \frac{\mu^2}{2}(A,A), \tag{7}$$

cuyas ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} -d^\dagger T + \mu^2 A &= 0, \\ dA + T &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

La teoría descrita por la acción (7), la llamaremos formulación dual de Proca.

Por otro lado, la acción de Cremmer y Scherck

$$S_{CS}[A,B] = (F, {}^\star B) + \frac{1}{2\mu^2}(H,H) + \frac{1}{2}(F,F), \tag{9}$$

puede ser generalizada a $d+1$ dimensiones de la misma manera que Proca [3]. Así, la formulación dual de la teoría de Cremmer y Scherck estará descrita por la acción

$$S^{\star}_{CS}[A,T] = (F,T) - \frac{1}{2\mu^2}(h,h) + \frac{1}{2}(F,F), \tag{10}$$

donde $T = ^{\star} B$ y $h = d^{\dagger}T = \partial^{\nu}T_{\mu\nu}dx^{\mu}$. Los términos cinéticos de Maxwell y Kalb-Ramond, estando solos, describen excitaciones sin masa. Ahora estando juntos con el término de interacción entre A y T, que es de naturaleza topológica, describen una excitación masiva. Es por esto que nos referiremos al modelo de Cremmer y Scherck como Topológico Masivo (TM).

Las ecuaciones de movimiento asociadas a la acción (10) son:

$$\begin{aligned} d^{\dagger}(T+F) &= 0, \\ d\left(d^{\dagger}T - \mu^2 A\right) &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

De las ecuaciones (5) y (11) se observa que las soluciones de Proca son soluciones de la TM. Por otra parte, las ecuaciones de la TM son siempre satisfechas si A es cerrada y T es cocerrada. Sin embargo, en el caso de Proca, las ecuaciones (5) dicen que $T=0$ si A es cerrada y $A=0$ si T es cocerrada.

En consecuencia, existe un sector en el espacio de soluciones clásicas libres de la TM que no está presente en el de Proca, formado por todas las formas no nulas A y T, cerradas (no exactas) y cocerradas (no coexactas) respectivamente. Este sector es de naturaleza topológica, puesto que depende de la estructura topológica de la variedad base. Este sector pertenece al espacio de soluciones clásicas del modelo B.F., cuya acción (dual) es,

$$S_{B.F.} = \frac{1}{2}(F,T) = -\int d^dx \frac{1}{2}T^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{12}$$

Las ecuaciones de la TM son localmente equivalentes a

$$A - \frac{1}{\mu^2}d^{\dagger}T = d\lambda, \tag{13}$$

$$dA + T = d^{\dagger}\Lambda. \tag{14}$$

Esto también ocurre en regiones donde el primero y el $(d-1)-$ésimo grupo de cohomología son triviales. En virtud de la invariancia de calibre de la TM, podemos escoger un calibre que absorba a λ y Λ, de modo que $\lambda=0$ y $\Lambda=0$, obteniéndose así las ecuaciones de Proca, luego de esta fijación. Vemos, entonces que el modelo de Proca surge luego de una fijación de calibre en la TM.

3 Equivalencia Canónica

Como se vió en la sección anterior, la acción de Proca se puede escribir en $d+1$ dimensiones en términos de la 2-forma $T = {}^\star B$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} S_P^\star = &\quad -(F,T) - \frac{1}{2}(T,T) + \frac{\mu^2}{2}(A,A), && (15)\\ S_P^\star = &\quad \frac{1}{2}\int d^D x \left[T^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}T^{\mu\nu}T_{\mu\nu} - \mu^2 A_\mu A^\mu\right]. && (16)\end{aligned}$$

Para construir el hamiltoniano hacemos la descomposición $d+1$ de la acción (16), i.e,

$$\begin{aligned} S_P^\star = \int d^D x \Big[\dot{T}_{0i}A_i + T_{0i}\partial_i A_0 + \frac{1}{2}T_{ij}F_{ij} - \frac{1}{2}T_{0i}T_{0i} + \frac{1}{4}T_{ij}T_{ij} \\ + \frac{\mu^2}{2}A_0 A_0 - \frac{\mu^2}{2}A_i A_i\Big], \qquad (17)\end{aligned}$$

donde hemos integrado por partes en el tiempo[1] para tomar como termino cinético a $\dot{T}_{0i}A_i$ en lugar de $T_{0i}\dot{A}_i$. De la ecuación (17) vemos que las variables A_0 y T_{ij} pueden ser consideradas variables no dinámicas, puesto sus velocidades no aparecen en la acción.

Definimos los momentos canónicos conjugados a los campos

$$\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = 0, \qquad (18)$$

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{T}_{0i}} = A_i, \qquad (19)$$

de donde se observa claremente que no se pueden despejar las velocidades, y en consecuencia tenemos el conjunto $\Psi_a = (\psi_i, \varphi_j)$ de $2d$ vínculos primarios

$$\begin{aligned} \psi_i &= \Pi_i, && (20)\\ \varphi_i &= p_i - A_i. && (21)\end{aligned}$$

Estos vínculos definen la superficie Γ_1 de los vínculos primarios. El hamiltoniano sobre Γ_1 es

$$H_P = \int d^d\vec{x}\left[\frac{\mu^2}{2}A_i A_i + \frac{1}{2}T_{0i}T_{0i} + A_0\left(\partial_i T_{0i} - \frac{\mu^2}{2}A_0\right) - \frac{1}{2}T_{ij}\left(F_{ij} + \frac{1}{2}T_{ij}\right)\right]. \qquad (22)$$

[1]Supondremos en todo el trabajo que los campos se anulan en la frontera de la región de integración, por lo tanto, los términos de borde no contribuyen.

Pidiendo ahora que las variaciones de H_P respecto de las variables no dinámicas se anulen

$$\frac{\delta H_P}{\delta T_{ij}} = -\frac{1}{2}\left(F_{ij} + T_{ij}\right) = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\delta H_P}{\delta A_0} = \partial_i T_{0i} - \mu^2 A_0 = 0, \tag{24}$$

se obtienen expresiones de las cuales se pueden despejar A_0 y T_{ij} en función de las variables canónicas

$$T_{ij} = -F_{ij}, \tag{25}$$

$$A_0 = \frac{1}{\mu^2}\partial_i T_{0i}. \tag{26}$$

Sutituyendo (25) y (26) en H_P, obtenemos

$$H_P = \int d^d\vec{x}\left[\frac{\mu^2}{2}A_iA_i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + \frac{1}{2\mu^2}(\partial_i T_{0i})^2 + \frac{1}{2}T_{0i}T_{0i}\right]. \tag{27}$$

La preservación en el tiempo de los vínculos nos conduce a ecuaciones que permiten despejar completamente los multiplicadores, de modo que el conjunto de vínculos ψ_a es de segunda clase. Los corchetes de Dirac entre los campos A_i y T_{0i} resultan ser

$$\{A_i(\vec{x}), T_{0j}(\vec{y})\}^* = -\delta_{ij}\delta^d(\vec{x} - \vec{y}), \tag{28}$$

La acción de Cremmer y Scherk en su formulación dual, se escribe en el lenguaje de formas de la siguiente manera

$$S^{\star}_{CS} = (F, T) + \frac{1}{2}(F, F) - \frac{1}{2\mu^2}(h, h) \tag{29}$$

$$= \int d^Dx\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2\mu^2}h_\mu h^\mu\right]. \tag{30}$$

Para hacer el análisis canónico procedemos a realizar la descomposición $d+1$ de la acción (30), i.e.,

$$S_{CS} = \int d^Dx\left[\frac{1}{2}F_{0i}F_{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} - \frac{1}{2\mu^2}h_0h_0 + \frac{1}{2\mu^2}h_ih_i + T_{0i}F_{0i} - \frac{1}{2}T_{ij}F_{ij}\right], \tag{31}$$

de aquí se observa que A_0 y T_{ij} se pueden considerar no dinámicas, por la ausencia de sus velocidades en la acción. Partimos de la definición de los momentos canónicos

conjugados a los campos

$$\Pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = F_{0i} + T_{0i} = \dot{A}_i - \partial_i A_0 + T_{0i}, \quad (32)$$

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{T}_{0i}} = \frac{1}{\mu^2} H_i = \frac{1}{\mu^2}\left(\dot{T}_{0i} + \partial_j T_{ij}\right). \quad (33)$$

de donde se pueden despejar completamente las velocidades

$$\dot{A}_i = \Pi_i + \partial_i A_0 - T_{0i}, \quad (34)$$

$$\dot{T}_{0i} = \mu^2 p_i - \partial_j T_{ij}. \quad (35)$$

Ahora procedemos a construir el Hamiltoniano,

$$\begin{aligned} H = & \int d^d x \left[\frac{1}{2}\Pi_i\Pi_i + \frac{\mu^2}{2} p_i p_i - \Pi_i T_{0i} + \frac{1}{2} T_{0i} T_{0i} + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\mu^2} H_0 H_0 + \frac{1}{2} T_{ij}\left(F_{ij} - \tilde{F}_{ij}\right) + A_0\left(-\partial_i \Pi_i\right)\right], \end{aligned} \quad (36)$$

donde $\tilde{F}_{ij} = \partial_i p_j - \partial_j p_i$.

Exigiendo que las variaciones de H respecto de los campos no dinámicos se anulen obtenemos el conjunto de vínculos $\Theta_a = (\theta, \theta_{ij})$, donde

$$\theta = -\partial_i \Pi_i = 0 \quad (37)$$

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2}\left(F_{ij} - \tilde{F}_{ij}\right). \quad (38)$$

Se puede ver que el conjunto Θ_a es de primera clase y las transformaciones de calibre generadas por estos son

$$\delta A_i(x) = \partial_i \xi \quad (39)$$

$$\delta T_{0i}(x) = \partial_j \xi_{ji} \quad (40)$$

El Hamiltoniano que genera la dinámica será

$$\tilde{H}_{TM} = \int d^d x \left[\frac{1}{2}\Pi_i\Pi_i + \frac{\mu^2}{2} p_i p_i - \Pi_i T_{0i} + \frac{1}{2} T_{0i} T_{0i} + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{2\mu^2} h_0 h_0 + \lambda^a \Theta_a\right], \quad (41)$$

donde $\lambda^a = (A_0, T_{ij})$ son los multiplicadores indeterminados de Lagrange asociados a los vínculos θ y θ_{ij}.

Vamos ahora a probar la equivalencia antes mencionada desde el punto de vista hamiltoniano.

El hamiltoniano de la teoría de Proca no invariante de calibre en $d+1$ dimensiones, una vez eliminadas las variables no dinámicas, obtenido anteriormente, es

$$H_P = \int d^3\vec{x}\left[\frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + \frac{1}{2\mu^2}\left(\partial_i T_{0i}\right)^2 + \frac{1}{2}T_{0i}T_{0i} + \frac{\mu^2}{2}A_iA_i\right], \tag{42}$$

sujeto a los vínculos de segunda clase $\Psi_a = (\psi_i, \varphi_j)$

$$\psi_i = \Pi_i, \tag{43}$$

$$\varphi_i = p_i - A_i. \tag{44}$$

Los corchetes de Poisson no nulos entre los vínculos son

$$\{\psi_i(x), \varphi_j(y)\} = \delta_{ij}\delta^d(x-y). \tag{45}$$

Podemos interpretar a la mitad de estos vínculos como de primera clase y la otra mitad como fijaciones de calibre. En lugar del conjunto Ψ_a tomaremos el conjunto $\gamma_a = (\Theta_a, \chi_a)$, siendo $\chi_a = ({\psi^T}_i, -\partial_i\varphi_i)$, respectivamente, la parte transversa de ψ_i y la parte longitudinal de φ_i. Este nuevo conjunto de vínculos es completamente equivalente al primero en regiones del espacio con topología trivial. Tenemos entonces que el conjunto de vínculos de la teoría de Proca se puede separar en los de la de Cremmer y Scherck más otra parte que se pueden interpretar como fijaciones. Entonces buscamos un Hamiltoniano invariante de calibre de la forma [3, 5]

$$\tilde{H}_P = H_P + \int d^3\vec{x}\left[\alpha_a(\vec{x})\Theta_a(\vec{x}) + \beta_a(\vec{x})\Phi_a(\vec{x}) + \int d^3\vec{y}\beta_{ab}(\vec{x},\vec{y})\Phi_a(\vec{x})\Phi_b(\vec{y})\right] \tag{46}$$

que difiere del de Proca por combinaciones de los vínculos. Para hallar los coeficientes $\alpha's$ y $\beta's$ exijimos que los corchetes de este hamiltoniano con los vínculos de primera clase sean debilmente cero. Esto nos va a conducir a una familia de Hamiltonianos invariantes de calibre, puesto que los α's no quedarán determinados por la condición antes mencionada. Sim embargo, podemos probar que el Hamiltoniano de S_{CS} es uno de esta familia, simplemente observando que

$$H^{d+1}_{TM} - H^{d+1}_{P} = \frac{1}{2}\Pi_i\Pi_i + \frac{\mu^2}{2}p_ip_i + T_{0i}\Pi_i + \frac{\mu^2}{2}A_iA_i, \tag{47}$$

$$= \frac{1}{2}\psi_i\psi_i + T_{0i}\psi_i + \frac{\mu^2}{2}\varphi_i\varphi_i + \mu^2 A_i\varphi_i. \tag{48}$$

Con esto, queda probada la equivalencia canónica, que como dijimos está sujeto a la cohomología de la variedad base. En otro dirección puede verse que la función de partción de ambos modelos difieren en un factor que correspon a la finción de partición de la acción S_{BF}. La presencia de este factor se hará sentir en el momento de calcular valores esperados de objetos sensibles a la topología del espacio tiempo. En este sentido la descripción a través de S_P o S_{CS} podrán ser distintas.

References

[1] E. Cremmer and J. Scherck, Nucl. Phys. **B72** (1974) 117.

[2] T.J. Allen, M.J. Bowick and A. Lahiri, Mod. Phys. Lett. **A6** (1991).

[3] P.J. Arias and L. Leal, Phys. Lett. **B404** (1997), 49.

[4] D.Z. Freedman and P.K. Towsend, Nucl. Phys. **B177** (1981) 282.

[5] R. Gianvittorio, A. Restuccia and J. Stephany, Mod. Phys. Lett. **A6** (1991) 2121.

[6] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing Ltd, 1995.